Ikki zarrachali Diskret Shryodinger operatorining spektri. Ikki zarrachali sistema gamiltoniani koordinata va impuls tasvirlari

Mehinbonu Tolibova Husniddin qizi

Buxoro davlat unversiteti

Annotatsiya: Ushbu maqolada umumlashgan Fridrixs model operator sifatida panjaradagi zarrachalar soni ikkitadan oshmaydigan sistemaga mos soni saqlanmaydigan operatorlar oilasi qaraladi. Bunda qaralayotgan operator ikki zarrachali Shroedinger operatori hamda paydo qilish va yo‘qotish operatorlari orqali aniqlanadi. Qaralayotgan operatorning muhim spektrdan tashqaridagi xos qiymatlari sonining o‘rgarishi ikki zarrachali $H_{\mu\lambda}(k)$ Shroedinger operatorida zarrachalar itarishuvchi yoki tortishuvchi bo‘lishiga, paydo qiluvchi va yo‘qotuvchi operatorlarga hamda o’zaro ta’sir energiyalariga va kvaziimpulsga bog‘liqligi o‘rganiladi.

Kalit so’zlar: hilbert fazosi, chegaralangan operator, chiziqli operator, Lebeg integrali, teska Gamiltonian, ikki zarrachali gamiltonian, birlik operator, integral operator, Veyl teoremasi, Shryodinger operatori, Fridrixs operatori.

$Z^d -$ d- o‘lchamli butun sonli panjara, $l_2((Z^d)^2) -$ $(Z^d)^2 = Z^d \times Z^d$ da aniqlangan kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi, $l_2^s((Z^d)^2) \subset l_2((Z^d)^2) -$ simmetrik funksiyalar qism fazosi bo’lsin.

Koordinita tasvirida ikki bozonli sistemaga mos Hamiltonian $l_2^s((Z^d)^2)$ Hilbert fazosida quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\hat{h}_{\mu\lambda} = \hat{h}_0 + \hat{v}_{\mu\lambda},$$

$$(\hat{h}_0\hat{\varphi})(x_1, x_2) = \sum_{s\in Z^d} \hat{\varepsilon}(s)[\hat{\varphi}(x_1 + s, x_2) + \hat{\varphi}(x_1, x_2 + s)], \hat{\varphi} \in l_2^s((Z^d)^2),$$

$$(\hat{v}_{\mu\lambda}\hat{\varphi})(x_1, x_2) = \hat{v}_{\mu\lambda}(x_1 - x_2)\hat{\varphi}(x_1, x_2), \quad \hat{\varphi} \in l_2^s((Z^d)^2).$$

$\hat{\varepsilon}(s)$ va $\hat{v}_{\mu\lambda}(s)$ funksiyalar Z^d da quyidagicha aniqlangan:

$$\hat{\varepsilon}(s)=\begin{cases}1, & agar \quad s=0\\ -\dfrac{1}{2}, & agar \quad |s|=1\\ 0, & agar \quad |s|>1,\end{cases} \qquad va \qquad \hat{v}_{\mu\lambda}(s)=\begin{cases}\mu, & agar \quad |s|=0\\ \dfrac{\lambda}{2}, & agar \quad |s|=1\\ 0, & agar \quad |s|>1\end{cases},$$

bunda $\mu,\lambda\in\mathrm{R} \quad s\in\mathrm{Z}^d$.

Ta'kidlab o'tamizki, ikki zarrachali Hamiltonian $\hat{h}_{\mu\lambda}$, $l_2^s((\mathrm{Z}^d)^2)$ Hilbert fazosida chegaralangan o'z-o'ziga qo'shma operator bo'ladi.

$\mathrm{T}^d=(-\pi;\pi]^d-$ d- o'lchamli tor, $L_2((\mathrm{T}^d)^2)-$ $(\mathrm{T}^d)^2=\mathrm{T}^d\times\mathrm{T}^d$ da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosi, $L_2^s((\mathrm{T}^d)^2)\subset L_2((\mathrm{T}^d)^2)-$ simmetrik funksiyalar qism fazosi bo'lsin.

$\mathrm{F}_2: L_2((\mathrm{T}^d)^2)\to l_2((\mathrm{Z}^d)^2)-$ standart Fourier akslantirishi bo'lsin. F_2^s orqali F_2 ning $L_2^s((\mathrm{T}^d)^2)$ qism fazodagi qismini belgilaymiz. Impuls tasvirda ikki zarrachali Hamiltonian $L_2^s((\mathrm{T}^d)^2)$ Hilbert fazosida quyidagi chegaralangan o'z-o'ziga qo'shma operatorni aniqlaydi.

$$h_{\mu\lambda}=(\mathrm{F}_2^s)^{-1}\hat{h}_{\mu\lambda}\mathrm{F}_2^s=h_0-v_{\mu\lambda},$$

bunda

$$(h_0 f)(k_\beta,k_\gamma)=(\varepsilon(k_\beta)+\varepsilon(k_\gamma))f(k_\beta,k_\gamma), \quad f\in L_2^s((\mathrm{T}^d)^2)$$

$$(vf)(k_\beta,k_\gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_{(\mathrm{T}^d)^2}\cos(k_\beta-t_\beta)\delta(k_\beta+k_\gamma-t_\beta-t_\gamma)f(t_\beta,t_\gamma)dt_\beta dt_\gamma,$$

$f\in L_2^s((\mathrm{T}^d)^2), \quad \beta,\gamma=1,2 \quad \beta\neq\gamma$.

Bu yerda $\varepsilon(p)$ funksiya $\varepsilon(p)=\sum_{i=1}^{d}(1-\cos p_i), p\in\mathrm{T}^d$ ko'rinishga ega va $\delta(k)-$ Dirakning delta funksiyasi $\hat{U}_s^2$, $s\in\mathrm{Z}^d$ orqali $l_2((\mathrm{Z}^d)^2)$ Hilbert fazosida quyidagi formula bilan aniqlangan unitar operatorni belgilaymiz

$$(\hat{U}_s^2 f)(n_1,n_2) = f(n_1+s,n_2+s), \quad f \in l_2((Z^d)^2).$$

Osongina ko‘rsatish mumkinki,

$$\hat{U}_{s+p}^2 = \hat{U}_s^2 \hat{U}_p^2, \quad s,p \in Z^d$$

tenglik o‘rinli va bundan $\hat{U}_s^2, s \in Z^d$ – $l_2((Z^d)^2)$ fazoda Z^d abel gruppasining unitar akslantirishi bo‘ladi. $l_2^s((Z^d)^2)$ – $\hat{U}_s^2, s \in Z^2$ gruppaga nisbatan invariant qism fazo bo‘ladi. F_2 Furye akslantirishidan so‘ng $l_2((Z^d)^2)$ fazodagi Z^d abel gruppasining unitar akslantirishi, $L_2((T^1)^2)$ Hilbert fazosida quyidagi formula bilan aniqlangan $U_s^2 = F_2^{-1}\hat{U}_s^2 F_2$, $s \in Z^d$ unitar operatorga o‘tadi:

$$(U_s^2 f)(k_1,k_2) = \exp(-i(s,k_1+k_2)) f(k_1,k_2), \quad f \in L_2((T^d)^2). \tag{1}$$

Har bir $k \in T^d$ uchun F_k^2 orqali quyidagi to‘plamni belgilaymiz

$$F_k^2 = \{(k_1,k-k_1) \in (T^d)^2 : k_1 \in T^d, k-k_1 \in T^d\}.$$

$L_2((T^d)^2)$ fazo

$$L_2((T^d)^2) = \int_{k \in T^d} \oplus L_2(F_k^2) dk$$

to‘g‘ri integralga yoyiladi.

Mos holda, U_s, $s \in Z^d$ unitar akslantirish quyidagi to‘g‘ri integralga yoyiladi

$$U_s^2 = \int_{k \in T^d} \oplus U_s(k) dk,$$

bunda $U_s(k)$, $L_2(F_k^2)$ fazoda quyidagi tenglik bilan aniqlanadi

$$U_s(k) = \exp(-i(s,k)) I$$

va $I = I_{L_2(F_k^2)}$ – $L_2(F_k^2)$ fazodagi birlik operator.

$h_{\mu\lambda}$ Hamiltonian (6) tenglik bilan aniqlangan U_s^2, $s \in Z^d$ gruppa bilan o‘rin almashinadi.

Shuning uchun

$$L_2^s((T^d)^2) = \int_{k \in T^d} \oplus L_2^s(F_k^2) dk,$$

yoyilmaga mos $h_{\mu\lambda}$ operator to‘gri integralga yoyiladi

$$h_{\mu\lambda} = \int_{k\in \mathrm{T}^d} \oplus \tilde{h}_{\mu\lambda}(k)dk,$$

bunda $L_2^s(\mathrm{F}_k^2)-$ $L_2(\mathrm{F}_k^2)$ fazoning simmetrik (o‘zgaruvchilari o‘rnini almashtirishga nisbatan) funksiyalardan tuzilgan qism fazosi.

Quyidagi akslantirishni kiritamiz

$$\pi_\alpha^{(2)} : (\mathrm{T}^d)^2 \to \mathrm{T}^d, \quad \pi_\alpha^{(2)}((k_\beta, k_\gamma)) = k_\beta.$$

$\pi_k^{(2)}$, $k\in \mathrm{T}^d$ orqali $\pi_\alpha^{(2)}$ ning $\mathrm{F}_k^2 \subset (\mathrm{T}^d)^2$ dagi qismini belgilaymiz, ya’ni

$$\pi_k^{(2)} = \pi_\alpha^{(2)}\big|_{\mathrm{F}_k^2} . \qquad (2)$$

Ta’kidlab o‘tish joizki, $\mathrm{F}_k^2, k\in \mathrm{T}^d$ bir o‘lchamli ko‘pxillik T^d ga izomorfdir.

Lemma 1 .*Teskarisi*

$$(\pi_k^{(2)})^{-1}(k_\beta) = (\frac{1}{2}k - k_\beta, \frac{1}{2}k + k_\beta)$$

tenglik bilan aniqlanadigan $\pi_k^{(2)}, k\in \mathrm{T}^d$ akslantirish $\mathrm{F}_k^2 \subset (\mathrm{T}^d)^2$ ni T^d ga biyektiv akslantiradi.

Ushbu akslantirishni qaraymiz

$$u_k : L_2^s(\mathrm{F}_k^2) \to L_2(\mathrm{T}^d), \quad u_k g = g \circ (\pi_k^{(2)})^{-1}, \quad k\in \mathrm{T}^d,$$

bunda $\pi_k^{(2)}$ (7) formula bilan aniqlangan. Ta’kidlab o‘tamizki, u_k unitar operator bo‘ladi.

$$h_{\mu\lambda}(k) = u_k \tilde{h}_{\mu\lambda}(k)(u_k)^{-1}$$

bo‘lsin.

$L_2^e(\mathrm{T}^d) \subset L_2(\mathrm{T}^d)$ orqali juft funksiyalar qism fazosini belgilaymiz. $h_{\mu\lambda}(k)$, $k\in \mathrm{T}^d$ operator $L_2^e(\mathrm{T}^d)$ Hilbert fazosida quyidagi formula bilan aniqlanadi

$$h_{\mu\lambda}(k) = h_0(k) - v_{\mu\lambda},$$

bunda $h_0(k)-$ $\varepsilon_k(\cdot)$ funksiyaga ko‘paytirish operatori:

$$(h_0(k)f)(p)=\varepsilon_k(p)f(p),\quad \varepsilon_k(p)=2\sum_{i=1}^{d}(1-\cos\frac{k_i}{2}\cos p_i),\quad f\in L_2^e(\mathrm{T}^d),$$

va $v_{\mu\lambda}-$ integral operator va uning rangi birdan oshmaydi:

$$(v_{\mu\lambda}f)(p)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{T}^d}(\mu+\lambda\cos q\cos t)f(t)dt,\quad f\in L_2^e(\mathrm{T}^d).$$

$h_{\mu\lambda}(k), k\in\mathrm{T}^d$ operatorning muhim spektri va xos qiymati mavjudligi haqida

$v_{\mu\lambda}-$ rangi birdan oshmaydigan integral operator bo‘lganligi uchun muhim spektr turg‘unligi haqidagi Veyl teoremasiga ko‘ra, $h_{\mu\lambda}(k)$ operatorning muhim spektri $\sigma_{ess}(h_{\mu\lambda}(k))$, $\mu,\lambda\in\mathrm{R}$ ga bog‘liqsiz va $h_0(k)$ operatorning spektri $\sigma(h_0(k))$ bilan ustma-ust tushadi. Shunday qilib, quyidagi tengliklar o‘rinli

$$\sigma_{ess}(h_{\mu\lambda}(k))=\sigma(h_0(k))=[m(k),M(k)],$$

bunda

$$m(k)=\min_{p\in\mathrm{T}^d}\varepsilon_k(p)=2\sum_{i=1}^{d}(1-\cos\frac{k_i}{2})\geq 0,$$

$$M(k)=\max_{p\in\mathrm{T}^d}\varepsilon_k(p)=2\sum_{i=1}^{d}(1+\cos\frac{k_i}{2})\leq 4d.$$

Shuni takidlash joizki $h_{\mu\lambda}(k)$, $k\in\mathrm{T}^d$ operatorning muhim spektri $\mu,\lambda\in\mathrm{R}$ ga bog‘liqsiz $[m(k),M(k)]$ kesmadan iborat va bu operatorning $\mu,\lambda\geq 0$ bo‘lganda $[m(k),M(k)]$ kesmadan chap tomonda xos qiymatga ega emas hamda mos ravishda $\mu,\lambda\leq 0$ bo‘lganda $[m(k),M(k)]$ kesmadan o‘ng tomonda xos qiymatga ega emas.

Bundan, ushbu paragrafning natijasi sifatida quyidagi teoremani keltiramiz:

Teorema 1 *a). $d=1,2$ $\mu^2+\lambda^2>0$ va $k\in\mathrm{T}^d$ bo‘lsin. U holda $h_{\mu\lambda}(k)$ operator kamida bitta $\zeta_1(\mu,\lambda;k)>M(k)$ xos qiymatga ega bo‘ladi va bu xos qiymatga mos xos funksiya quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi*

$$f_1(p)=\frac{\mu C+\lambda\cos q}{\varepsilon_k(p)-\zeta_1}\in L_e^2(\mathrm{T}^d),\quad C=const\neq 0. \tag{3}$$

Foydalanilgan adabiyotlar

[1] S.N.Lakaev,Sh.M.Latipov. О существование и аналитичности собственных значений двухканальной молекулярно резонансной модели. ТМФ, 169(2011) №3, стр. 1657-1666.

[2] Sh.M.Latipov.J.I.Asadov. О существование собственых значений вне существенного спектра одной обобщенной модели Фридрихса. // "Современные методы математической физики и их приложения". Тез. докл. Рес. науч. конф.- Ташкент, 2015. - С. 72-73.

[3] D.A.Latipova J.I.Asadov.О числе собственных значений одной обобщенной модели Фридрихса. "Matematika va uni zamonaviy pedagogik texnalogitalar yordamida o‘qitish muammolari" Navoiy 2015y .str 47-48.

[4] S.N Lakaev, Holmatov Sh.Yu. Asymptotics of eigenvalues of twoparticle Schro’dinger operators on lattices withzero range interaction. J.Physics.

A:Math Theor 44(2011)135304 (19pp).

[5] Sh.M.Latipov Sh.B.Latipov. О существование собственных значений вне существенного спектра двухканальной молекулярно резонансной модели. Qashqadaryo 2016y.

[6] Sh.M.Latipov Sh.B.Latipov. О существование собственных значений ниже существенного спектра двухканальной молекулярно резонансной модели. "Matematikaning dolzarb muamolari" Andijon 2016y .str 158-159.

[7] Albeverio S., Lakaev S. N. and Muminov Z. I.: The threshold effects for a family of Friedrichs models under rank one perturbations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 330, Issue 2, 15 June 2007, pp. 1152-1168.

[8] Sh.M. Latipov. On the eigenvalues of the two-channel molecular-resonance model. // The International Training and Seminars on Mathematics (ITSM). Samarkand, Uzbekistan, 2011, pp. 168-170.

[9] Ш.М. Латипов. О соотношениях собственных значений двухканальной молекулярно резонансной модели. // "Замонавий математиканинг долзарб муаммолари". Тез. докл. Рес. науч конф. Карши, 2011 -С. 164-166

[10] Ш.М. Латипов, Г.Р Ёдгоров О существование собственных значений двухканальной молекулярно резонансной модели // "Актуальные проблемы математического анализа". Тез. докл. Рес науч конф Ургенч, 2012. -С. 151-152.

[11] С.Н. Лакаев, Ш.М. Латипов О числе собственых значений двухканальной молекулярно- резонансной модели. // International training-seminars on mathematics in conjunction with the joint mathematics meeting. 2013 between Samarkand State University and Malayzian Mathematical Sciences Society.

[12] С.Н. Лакаев, Ш.М .Латипов О существование и аналитичности собственных значений двухканальной молекулярно резонансной модели // ТМФ, 169(2011) №3, стр. 1657-1666

[13] Ш.М.Латипов О существование собственных значений двухканальной молекулярной модели // Узбекский Математический Журнал - Ташкент, 2015-№2-С 63-74 (01 00 00; №6)

[14] Ш.М. Латипов. О числе собственых значений вне существенного спектра двухканального модельного оператора // Узбекский Математический

Журнал -Ташкент, 2015-№3 -С. 65-75 (01:00.00, №6)

[15] М.Э.Муминов, Ш.М. Латипов Бир модел операторининг мухим спектри хакида /// "Ёш олимлар илмий конференциясида" 2004 - С 57-58. [64] ШМ Латипов. Оценка для числа собственных значений оператора

[16] Ш.М. Латипов. О существование собственых значений вне существенного спектра двухканальной молекулярной модели. // Matematika va uni zamonaviy pedagogik texnologiyalar yordamida o'qitish muammolari. Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi materiallari. Navoiy, 2015 y. 25-aprel. - C. 50-52.