KOMPLEKS ARGUMENTLI FUNKSIYA INTEGRALI. ODDIY KONTUR UCHUN KOSHINING INTEGRAL TEOREMASI VA UNING TATBIQLARI

***G`affarova Dilfuza Shavkat qizi*** *(NavDPI o`qituvchisi)*
Ashurova Gulshan Shuhratovna *(NavDPI o`qituvchisi)*
Narzullayeva O`g`iloy Bahrom qizi *(NavDPI talabasi)*

Tayanch iboralar: *Silliq chiziq, kompleks argumentli funksiyaning integral yig'indisi, integral, boshlang'ich funksiya, parametrga bog'liq integrallar, integral belgisi ostida limitga o'tish, takroriy integrallar, bir bog'lamli soha, analitik funksiya, differensiallanuvchi funksiya, Koshi integrali.*

$w = f(z)$ kompleks qiymatli uzluksiz funksiya L chekli egri chiziqda aniqlangan bo'lsin. L egri chiziqni $a = z_0,\ z_1, \dots,\ z_n = b$ nuqtalar yordamida $S_1,\ S_2, \dots,\ S_n$ yoylarga bo'linishini qaraymiz, bu yerda a chiziqning boshi, b esa oxiri. S_k–yoyning uzunligini l_k bilan belgilaymiz va $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n} l_k$. Har bir S_k yoyda $\forall \varsigma_k$ ($\varsigma_k \in S_k$.) nuqtani tanlab

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)(z_k - z_{k-1}) \qquad (1)$$

integral yig'indini tuzamiz.

Ta'rif. Agar (1) integral yig'indi $\lambda \to 0$ da z_k va ς_k nuqtalarning tanlanishidan bog'liq bo'lmasdan aniq chekli limitga ega bo'lsa, bu limitga $w = f(z)$ funksiyaning L egri chiziq bo'ylab integrali deyiladi va

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\lambda\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\left(z_k - z_{k-1}\right) \qquad (2)$$

ko'rinishda yoziladi.

Teorema. (Koshi teoremasi bir bog'lamli soha uchun). Agar $w = f(z)$ funksiya bir bog'lamli chegaralangan D sohada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda shu sohaga qarashli bo'lgan ixtiyoriy L to'g'rilanuvchi yopiq egri chiziq bo'yicha olingan integralning qiymati nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$\int_L f(z)dz = 0$$

Tarif. D sohada $F(z)$ funksiya $f(z)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deyiladi, agar barcha $z \in D$ uchun $F'(z) = f(z)$ bo'lsa.

Teorema. Agar $f(z)$ funksiya bir bog'lamli D sohada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya shu sohada boshlang'ich funksiyaga ega bo'ladi.

Teorema. Agar $f(z)$ funksiya bir bog'lamli D sohada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda Nyuton-Leybnis formulasi

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\varsigma)d\varsigma = F(z_1) - F(z_0)$$

o'rinli bo'ladi.

Endi o`rganganlarimizni ba`zi misollarga tatbiq qilib chiqamiz:

1-Misol Berilgan integralni hisoblang:

$$I = \int_\Gamma (z\bar{z} + z^2)dz,$$

bu yerda Γ chiziq $|z| = 1$ aylananing yuqori yarmi, ya'ni $|z| = 1,\ 0 \le \arg z \le \pi$.

Yechish. I ni hisoblash uchun $z - \alpha = re^{i\varphi}$ aylana tenglamasidan foydalanamiz. Bizning misolda $\alpha = 0, r = 1$;

$$z = e^{i\varphi}, dz = ie^{i\varphi}d\varphi, 0 \le \varphi \le \pi,\ z\bar{z} = e^{i\varphi}e^{-i\varphi} = 1.$$

Shuning uchun

$$I = i\int_0^\pi (1 + e^{2i\varphi})e^{i\varphi}d\varphi \quad = \int_0^\pi (e^{i\varphi} + e^{3i\varphi})di\varphi = \left(e^{i\varphi} + \frac{1}{3}e^{3i\varphi}\right)\Big|_0^\pi =$$

$$(e^{i\pi} - e^0) + \frac{1}{3}(e^{3i\pi} - e^0) = -\frac{8}{3},$$

chunki $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1, e^{3i\pi} = \cos 3\pi + i\sin 3\pi = -1.$ Demak $I = -\frac{8}{3}.$

2-Misol. Ushbu integralni hisoblang:

$$I = \int_{\Gamma} \mathrm{Re}\, z\, dz,$$

bunda Γ chiziq $z = z(t) = (2+i)t$, $0 \le t \le 1$ tenglama bilan aniqlangan.

Yechish. Ma'lumki,

$$z = x + iy, \mathrm{Re}\,\mathrm{mod}1mmz = x; dz = dx + i\,dy, x = 2t, \quad \text{ya'ni} \quad y = \frac{x}{2};$$

$$dx = 2\,dt, dy = dt; \mathrm{Re}\,\mathrm{mod}1mmz\,dz = x(dx + i\,dy) = x\,dx + ix\,dy = 4t\,dt + 2it\,dt.$$

Demak,

$$I = 4\int_0^1 t\,dt + 2i\int_0^1 t\,dt = 2 + i.$$

bo`ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro`yxati

1. G.Xudayberganov, A.Vorisov,X.Mansurov,B.Shoimqulov Matematik analizdan ma’ruzalar.1T.:«Voris-nashriyot».2010y. 374b.
2. Xudayberganov G., Vorisov A., Mansurov X., Shoimqulov B. Matematik analizdan ma’ruzalar. II T.: «Voris-nashriyot». 2010 y. – 352 b.
3. Аюпов Ш.А., Бердиқулов М.А., Тургунбаев Р.М. Функциялар назарияси. Т.: «ЎАЖБНТ» Маркази, 2004у.- 148б.
4. Ayupov Sh.A., Berdiqulov M.A., Turgunbaev R.M. Funksional analiz. T.: TDPU. 2008 y.-136b.
5. Ayupov Sh.A., Berdiqulov M.A., Turgunbaev R.M. Matematik analiz funksional analizga kirish). T.: TDPU. 2014 y.-126b.
6. Ayupov Sh.A., Ibragimov M.M., Kudaybergenov K.K. Funksional analizdan misol va masalalar.Nukus.“Bilim”-2009 y. -302 b.
7. Turgunbayev R. Matematik analiz. 2-qism. T.:TDPU, 2008 y.-136b.
8. Жўраев Т. ва бошқалар. Олий математика асослари. 2-қ. Т.: «Ўзбекистон». 1999.- 303б.
9. Turgunbaev R.,Ismailov Sh.Abdullaev O. Differentsial tenglamalar kursidan misol va masalalar to‘plami.T.:TDPU.2007y.-84 b.
10. Саъдуллаев А. ва бошқ.Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами.III қисм.Т.,«Ўзбекистон».2000й.-400б.
11. Архипов Г.И.,Садовничий В.А.,Чубариков Д.И.Лекции по математическому анализу.М.:«Высшая школа».1999 г.–695 с.
12. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегралное исчесление. 1 том. СПб.: «Мифрил». 1996 г. – 416 стр.
13. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегралное исчесление. 2 том. СПб.: «Мифрил». 1996 г.-426 стр.