PLITALARNI BILVOSITA CHEGARA ELEMENTI USULIDAN FOYDALANIB EGISH

TURGUNOVA LAYLOXON

Ushbu maqola IBEM (bilvosita chegara elementi usuli) dan foydalanishni tavsiflaydi. Chiziqli formulada ixtiyoriy kontur plitalarini egish masalasini hal qilish algoritmi. Plitalarni mahkamlashning turli usullaridagi yuklarni qoplash usulini integral tenglamalarni beramiz. Plastinka konturi elementlari bo'yicha sonli integrasiya formulalarini beramiz.

Kalit so'zlar: chegara elementi usuli, burilish plitasi, yuklarni muvozanatlash usuli, chiziqli tenglamalar tizimi.

Mexanika masalalarini yechishning samarali usullaridan biri potentsial usullari yoki chegaraviy integral tenglamalar usullaridir. Ular differensial tenglamalarning dastlabki tizimini chegaraviy integral tenglamalar sistemasiga aylantirishga asoslanadi, ularning yechimidan chegaradagi zichlik funksiyalari aniqlanadi. Domendagi kerakli yechim topilgan zichlik funksiyalari bilan chegaraviy integral ifodalar bilan aniqlanadi. Raqamli yechimda diskretizatsiya mintaqa uchun emas, balki uning chegarasi uchun amalga oshiriladi.

Chegaraviy integral tenglamalar usullarini o'rganish va rivojlantirishga V.D.Kupradze, N.I.Musxelishvili, S.G.Mixlin, V.I.Smirnovlar katta hissa

qo'shdilar. Va boshq. Kupradze V.D. Elastiklik nazariyasi masalalariga potentsial usullarning vektor integral tenglamalari o'rganildi va kiritildi. U bir jinsli jismlar uchun statik masalalarni va parcha-parcha bir jinsli jismlar uchun dinamik masalalarni yechishning sonli usullarini ishlab chiqdi. U manbalarning sirt zichligi

taqsimotlaridan foydalanib, muhit chegarasidagi kuchlanishlar va siljishlar o'rtasidagi munosabatni shakllantirdi. Melnikov Yu.A., Haveli S.P. asarlarida.

Integral munosabatlar quriladi, ularning yadrolari fundamental yechimlar emas, balki chegaralari ko'rib chiqilayotganlar bilan qisman mos keladigan mintaqalar uchun tegishli tenglamalar yoki tizimlarning Grin funktsiyalari yoki matritsalari. Bunday potentsial munosabatlarni qurish g'oyasi V.D.ga tegishli. Kupradze va S.P tomonidan ishlatilgan. Haveli, Yu.A. Melnikov va ularning izdoshlari va shogirdlari,Elastiklik nazariyasi muammolarida potentsial usullarning sonli amalga oshirilishi Parton V.Z., Crouch S.Brebbia K., Ugodchikov A.G., Perlin P.I., Benerji P, Walker S.,Butterfield R., Starfild A., Kruza T. Asarlariga bag'ishlangan. ,Vroubela L., Rizzo F., Gromadki T., Lei Ch., Kuznetsova S.V.,Livshica I.M., Rosenzweiga L.N. va boshqalar [1-3]. Chegaraviy element usuli (BEM) chegaraviy integral tenglamalarni sonli yechish usulidir.

Domen chegarasini diskretlashtirish va chegaradagi zichlik funksiyalarining yaqinlashuvini spetsifikatsiya qilish bilan. Olimlarning BEMni qo'llashga bo'lgan

qiziqishi ushbu usulning afzalliklari bilan bog'liq: konturning geometriyasiga cheklovlar yo'qligi, ko'rib chiqilayotgan muammoning o'lchamining bir birligiga

qisqarishi, xususiyatlarining analitik tavsifi,yechim va eritmaning yuqori aniqligi natijalari. Chegaraviy integral tenglamalarni tuzish usullari orasida ikkita asosiy yo'nalishni ajratib ko'rsatish mumkin. Chegaraviy elementlarning to'g'ridan-to'g'ri

usulida integral tenglamalarga kiruvchi noma'lum funktsiyalar fizik ma'noga ega bo'lgan masalaning haqiqiy o'zgaruvchilari hisoblanadi. Shunday qilib, masalan, elastiklik nazariyasi muammolarida, integral tenglamaning bunday yechimi darhol chegaradagi barcha kuchlar va siljishlarni berishi kerak, tananing ichida esa ular sonli integratsiya orqali chegara qiymatlaridan olinishi kerak. Chegaraviy elementlarning bilvosita usulida integral tenglamalar yadrolari asosiy yechimni va uning ma'lum zichlikdagi ko'rib chiqilayotgan hudud chegarasida taqsimlangan hosilalarini ifodalaydi. Zichlik funksiyalari chegaradagi yechimlari emas, lekin ular aniqlangan bo'lsa, u holda sohadagi yechim chegara integrallarini hisoblash yo'li bilan aniqlanadi.Plastinkalarni egish muammolarida chegara elementlarining bilvosita usuli yuklarni qoplash usuli sifatida tanilgan. Zichlik funktsiyalari cheksiz plastinkaga qo'llaniladigan va mintaqaning chegarasi bo'ylab yoki mintaqa joylashgan ba'zi kontur bo'ylab taqsimlangan yuklarning ma'nosini beradi. Plastinkalarni egish muammolarida bu yo'nalishdagi birinchi ishlarni Korenev B.G. va bu usul Yu.P.Artyuxin, A.P.Gribov, E.S.Ventsel, V.M.Tolkachev va boshqalarning asarlarida yanada rivojlangan.

Dastlabki nisbatlar va farazlar

Plitaning og'ishlari w kichik bo'lgan hollarda qalinligi h bilan solishtirganda, ko'ndalang yuk ostida plastinka egilishining to'liq qoniqarli taxminiy nazariyasini yaratish , quyidagi gipotezalarga asoslanadi:

1. Median tekislikda plastinka boshdan kechirmaydi deformatsiya yo'q. Bukish paytida bu tekislik neytral bo'lib qoladi.

2. Yuklashdan oldin yotgan plastinkaning nuqtalari median yuzasiga normalar uning median yuzasiga normal ustida egilish jarayonida qoladi.

3. Yo'nalishdagi normal kuchlanishlar, plastinkaning o'rta tekisligiga ko'ndalangni e'tiborsiz qoldirish mumkin.

Ushbu farazlarga asoslanib, biz barcha stress komponentlarini burilish nuqtai nazaridan ifodalashimiz mumkin w plastinka tekisligidagi ikkita

koordinataning funktsiyasi bo'lgan plastinka. Bu funktsiya chiziqli qisman differensial tenglamani qondirishi kerak, bu esa chegara shartlari bilan

birgalikda to'liq aniqlaydi.w. Koordinata o'qlarini joylashtirilgan medianda x va y plastinka tekisligi, z o'qi to'g'ridan-to'g'ri perpendikulyar.

Differensial tenglama tekisliklarga parallel bo'lgan ikki juft tekislik tomonidan plastinkadan tanlangan elementni hisobga olgan holda tuziladi *xz* va *yz*. M_x orqali bilan bog'liqligini bildiradi o'qga parallel bo'lgan chekkalarda harakat qiluvchi birlik uzunlikdagi egilish momenti *y*, *M* orqaliy- on o'qga parallel ravishda qirralarning bo'ylab biriktirilganx, *M xy*- moment,*Qx* va *Qy*- vertikal ko'ndalang elementning yon tomonlari bo'ylab qo'llaniladigan kuchlar. Guk qonunidan foydalanib, plastinaning egilishi orqali momentlarning ifodalarini yozamiz *w*:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

(1)

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$M_{xy} = -D(1-v)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

Qayerda $D=\frac{Eh^3}{12(1-v^2)}$ - plastinkaning egilishining qattiqligi, *E* elastiklik moduli,

n – Puasson nisbati. Plitaning yuqori yuzasiga taqsimlangan yukning intensivligini *q* bilan belgilaylik .Hamma narsani loyihalash eksa ustidagi elementga qo'llaniladigan kuchlar *z* va lahzalarni olish bu kuchlardan o'qlarga nisbatan *x* va *y*, bartaraf qilingandan keyin biz ko'ndalang kuchlar, muvozanat tenglamasini olamiz:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q. \qquad (2)$$

Momentlar shartlaridan ko'ndalang kuchlar uchun ifodalarni ham olish mumkin

$$Q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$Q_y = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \qquad (3)$$

(1) ifodalarni muvozanat tenglamasiga almashtirib (2), toping

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \qquad (4)$$

(4) tenglama 4-tartibli qisman differentsial tenglamadir. U quyidagi shaklda ham yozilishi mumkin

$$\Delta\Delta w = \frac{q}{D}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

4-tartibli tenglama uchun chegaraviy masala aniq yechimga ega bo'lishi uchun konturda chegara shartlari ko'rsatilishi kerak. Agar plastinkaning cheti yopiq bo'lsa, unda chegara shartlari shaklga ega

$w=0\,,\ \frac{\partial w}{\partial \vec{n}} = 0;$ (5)

operatorda ifodalangan

$w=0,\ M_n=0;$ (6)

erkinlik bilan

$M_n=0,\ \ Q_n^*=0;$ (7)

Bu yerda M_n- normal egilish holati, Q_n^*-konturda kamaytirilgan ko'ndalang kuch

$$Q_n^* = Q_n + \frac{\partial M_{n\tau}}{\partial s}\ ,$$

$n\tau$ – plastinka konturining normal va tangensial yo'nalishlari,

s—konturning yoy koordinatasi. Kuch omillarini Q_n, M_n, $M_{n\tau}$ orqali ifodalash mumkin. Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{xy} quyidagi formulalar bo'yicha

$$Q_n=Q_x\cos f+Q_y\sin f\,,$$

$$M_n=M_x\cos^2 f+M_y\sin^2 f+M_{xy}\sin 2f\,, \qquad (8)$$

$$M_n=M_{xy}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}(M_y-M_x)\sin 2\varphi,$$

Qayerda f - konturga normal yo'nalish orasidagi burchak leniyan va x o'qining yo'nalishi. Formulalar (8) konturga ulashgan cheksiz kichik plastinka elementi uchun muvozanat shartlaridan kelib chiqadi.Tenglamalarning birinchisi proyeksiyalarning nol yig'indisining natijasi, qolganlari esa elementga

qo'llaniladigan kuchlar momentlarining yig'indisidir. Egri chiziqli konturli plitalarni hisoblash uchun konturga normal bo'ylab va uning bo'ylab burilish

hosilalari orqali ichki kuchlar va momentlarning qiymatlarini ifodalash kerak:

$$M_n=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}+v\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}\right),$$

$$M\tau=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}+v\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}\right),$$

$$M_n\tau=-D(1-v)\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)\right),$$

(9)

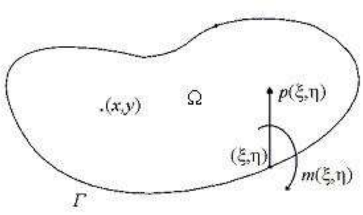
$$Q_n = -D\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}\right),$$

$$Q_n^* = -D\left(\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}\right)\right) + (1-\nu)\left(\frac{\partial^3 w}{\partial n \partial \tau^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}\right)\right)$$

bu yerda $\rho -$ konturning egrilik radiusi.

Plitalarni egishda kompensatsiya yuklash usuli

Yupqa izotropik chiziqli elastik plastinkani ko'rib chiqamiz, uning o'rta yuzasi silliq kontur G bilan chegaralangan Ō domenni egallaydi.-cheksiz hududga. G konturi bo'ylab cheksiz plastinkaga qo'shamiz. kiruvchi yuklarp(z) va m(z) . Yuklash p(z) -plastinka yuzasiga normal bo'lgan G konturi bo'ylab tarqalgan kuch,m(z) – taqsimlangan G kontur G konturga teginish atrofidagi moment (1-rasm).



Plastinkalarni bukishning ushbu muammosini hal qilish asosiy va kompensatsion echimlarning yig'indisi sifatida qaraladi. Asosiy yechim cheksiz plastinkaning berilgan yuklardan deformatsiyasini aniqlaydi, kompensatsion eritma plastinka konturi bo'ylab taqsimlangan kuchlar tizimining cheksiz plastinkasiga ta'sirini aniqlaydi (kompensatsion yuklar), buning natijasida konturdagi chegara shartlari. tovoq qanoatlantirildi. Asosiy va kompensatsion echimlarning yig'indisi plastinkaning egilish tenglamasini qondirishi kerak.

$$\Delta\Delta w = \frac{q}{D}, \qquad (10)$$

(10) tenglamaning yechimi integral shaklda izlanadi.

$$w(t) = w^r(t) + \int \left[G(t,\mu)p(\mu) - \frac{\partial G(t,\mu)}{\partial n} m(\mu)\right] d(\mu)\,; \qquad (11)$$

$$w^r(t) = \iint_\Omega G(t,\mu)q(\mu)d\Omega(\mu) + \sum_i G(t,\mu)F_i(\mu_i). \qquad (12)$$

Bu yerda G(t, μ)- muammoning asosiy yechimi cheksiz plastinkaning egilishi,t(x, y) - maydon nuqtasi Ω, $\mu(\varepsilon, \gamma)$ - kontur nuqtasi G:

$$G(t,\mu) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r, \qquad (13)$$

$$r = \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + (y-\gamma)^2}$$

$q(\mu)$ – taqsimlanish intensivligi. $F_i -$ modul jamlangan z nuqtada qo'llaniladigan o'lchangan kuchi(i =1,2,…). Kompensatsion yuklar plastinka konturidagi (5)-(7) chegara shartlaridan aniqlanadi. Chegara shartlari Ō

hududi uchun G konturiga yoziladi.E'tibor bering, (13) ifoda (10) differensial

munosabatni qanoatlantiradi. (13) chegaraviy masala yechimi bo'lishi uchun (5)-(7) chegaraviy shartlarga (13) ni qo'yish orqali olinadigan singulyar integral

tenglamalar tizimidan zarur. plastinkaning konturida, funktsiyalarni aniqlangp(z) va m(z) . Bunday holda, cheklovni amalga oshirish kerak nuqta harakatit(x, y) ning ichki qismidan Ō gacha G.Mintaqada Ō, egilish va burilish momentlari mashhurga ko'ra p(z) , m(z) quyidagicha aniqlanadi

$$M_x(t) = -D\int\left[\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right)p(\mu) - \left(\frac{\partial^3 G}{\partial x^2 \partial n} + v\frac{\partial^3 G}{\partial y^2 \partial n}\right)m(\mu)\right]d(\mu) + M_{x^r}(t)\,,$$

$$M_y(t) = -D\int\left[\left(\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + v\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)p(\mu) - \left(\frac{\partial^3 G}{\partial y^2 \partial n} + v\frac{\partial^3 G}{\partial x^2 \partial n}\right)m(\mu)\right]d(\mu) + M_{x^r}(t)$$

,

$$M_{xy}(t) = -D(1-v)\int\left[\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}p(\mu) - v\frac{\partial^3 G}{\partial x \partial y \partial n}m(\mu)\right]d(\mu) + M_{xy^r}(t), \quad (14)$$

Qayerda

$$M_{x^r}(t) = -D\left(\frac{\partial^2 w^r(t)}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 w^r(t)}{\partial y^2}\right),$$

$$M_{y^r}(t) = -D\left(\frac{\partial^2 w^r(t)}{\partial y^2} + v\frac{\partial^2 w^r(t)}{\partial x^2}\right),$$

$$M_{xy}(t) = -D(1-v)\ \frac{\partial^2 w^r(t)}{\partial x \partial y}. \qquad (15)$$

Raqamli misollar

Ushbu bo'lim masalani yechishning raqamli amalga oshirilishi misollariga bag'ishlangan. Oldingi bo'limlarda keltirilgan metodologiyani sinab ko'rish uchun bir nechta test holatlari ko'rib chiqiladi va masalalarning analitik echimlari bilan taqqoslashlar beriladi.

1-vazifa . Misol tariqasida kvadrat tanlangan plastinka. q - bir xil taqsimlangan yuk, $q = 2*10^6$, a - kvadrat tomoni $a = 1$, D – plastinkaning egilish qattiqligi.

$$D = \frac{E*h^3}{12(1-v^2)}.$$

Kvadrat plitaning markazida burilish natijalari 1-jadvalda ko'rsatilgan.

1-jadval

	Tez. element	chiziq elementi
8 tugun	0,0015722422347459	0,0015585241670949
24 tugun	0,0011151149982027	0,0011949410724905
40 tugun	0,0011104006543812	0,0011419081694110
tahlil qiluvchi yechim	0,00110074	0,00110074

Kvadrat plastinka markazidagi burilish uchun analitik yechim [7] quyidagicha:

$$W = 0.00126 * \frac{q*a^4}{D}.$$

2-vazifa. Misol tariqasida boshqa plastinka turini ko’rib chiqaylik.

q - bir xil taqsimlangan yuk, $q = 2*10^6$, a – aylana radiusi , $a = 1$, D – plastinkaning egilish qattiqligi.

$$D = \frac{E*h^3}{12(1-v^2)}.$$

Markazidagi dumaloq plastinkani egilishi uchun analitik yechim [7] quyidagicha:

$$W = \frac{q*a^4}{64*D}.$$

Bundan tashqari 2- jadvalda biz aylana uchun plastinkaning markazidagi burilishini olamiz(doimiy va chiziqli holat) turli xil sonli tugunlar uchun va analitik yechim bilan solishtirishimiz mumkin.

2-jadval.

	Tez. element	chiziq elementi
8 tugun	0.0101531248198796	0.011436892100835
24 tugun	0.013348671920581	0.014961333868765
40 tugun	0.0135029600389354	0.0135702357495802
tahlil qiluvchi yechim	0.01365	0.01365

Xulosa

Ushbu ishda taklif qilingan texnika chegaradagi doimiy va chiziqli element yordamida ixtiyoriy kontur plitasining markazidagi burilishni aniqlashga imkon beradi. Bundan tashqari, plastinkani panjaraga bo'lish va bu panjaraning har bir nuqtasida (ma'lum bir qadam bilan) burilishni aniqlash orqali butun plastinkaning egilish xarakteri xususiyatlarni o'rganish mumkin. Raqamlarni taqqoslash boshqa mualliflarning analitik yechimlari bilan olingan natijalar, foydalanilgan algoritmning ishonchliligini ko'rsatadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. - 524 с.

2. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Метод граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. — 494 с.

3. *Крауч С., Старфилд А.* Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987. -328 с.

4. *Голованов А.И., Бережной Д.В.* Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. Казань,

2001, 300 с.