GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN XARAKTERISTIK TO`RTBURCHAKDA BERILGAN CHEGARAVIY MASALA YECHIMINING MAVJUDLIGI HAQIDA

Qo`ldasheva Shoxsanam Ravshanjon qizi.
FDU matematika (yo`nalishlar bo`yicha) mutaxassisligi magistranti
qoldashevashohsanam10@gmail.com

Annotatsiya: Ushbu maqolada giperbolik tipdagi tenglamalar uchun bitta yarim tekislikda joylashgan va turli xarakteristik chiziqlar oilasiga mansub ikkita xarakteristikalardagi noma’lum funksiyaning qiymatlarini bog`lovchi nolokal shartli chegaraviy masala tadqiq etilgan.

Аннотация: В данной статье исследуется нелокальная краевая задача для уравнений гиперболического типа, связывающая значения неизвестной функции в двух характеристических линиях, расположенных в одной полуплоскости и принадлежащих разным семействам характеристических линий.

Abstract: In this article, a nonlocal conditional boundary value problem with nonlocal condition connecting the values of the unknown function in two characteristic lines located in one half-plane and belonging to different families of characteristic lines for hyperbolic type equations has been studied.

Kalit so`zlar: nolokal shartli chegaraviy masala, giperbolik tipdagi tenglama, xarakteristik chiziqlar oilasi, Koshi masalasi.

Ключевые слова: нелокальная краевая задача, уравнение гиперболического типа, семейство характеристических линий, задача Коши.

Key words: nonlocal boundary value problem, equation of hyperbolic type, family of characteristic lines, Cauchy problem.

Ushbu maqolada

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \qquad (1)$$

tenglama uchun quyidagi $AC_1: \ x + at = 0$ $BC_1: \ x - at = 1$, $AC_2: \ x - at = 0$, $BC_2: \ x + at = 1$ xarakteristikalar bilan chegaralangan D sohada bitta yarim tekislikda joylashgan va turli xarakteristik chiziqlar oilasiga mansub ikkita xarakteristikalardagi noma’lum funksiyaning qiymatlarini bog`lovchi nolokal shartli chegaraviy masala tadqiq etilgan. [1] da giperbolik tipdagi tenglamalar uchun nolokal shartli chegaraviy masalalar, [2], [3] da esa tipi va tartibi buziladigan giperbolik tipdagi tenglamalar uchun xarakteristik to`rtburchakda chegaraviy masalalar tadqiq etilgan.

Masalaning qo\`yilishi: Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $U(x,y)$ funksiya topilsin:

1) $U(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^2(D_1\cup D_2)$,

2) Ixtiyoriy $x\in(0,1)$ uchun $\lim\limits_{y\to+0}U_y(x,y)$ limit mavjud va $\lim\limits_{y\to-0}U_y(x,y)=\lim\limits_{y\to+0}U_y(x,0)$, $0<x<1$ ulash shartini qanoatlantirsin;

3) D_1 va D_2 sohalarda (1) tenglamani qanoatlantirsin;

4) $a_1(x)U(\theta_{01})+b_1(x)U(\theta_{11})=d_1(x),\ 0\le x\le 1,$ (2)

$$a_2(x)U(\theta_{02})+b_2(x)U(\theta_{12})=d_2(x),\ 0\le x\le 1, \quad (3)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin, bu yerda $a_j(x), b_j(x)$, $d_j(x)\in C[0,1]\cap C^3(0,1)$ – berilgan funksiyalar bo\`lib, $a_j^2(x)+b_j^2(x)\ne 0$, $\theta_{0j}\left(\frac{x}{2};(-1)^j\frac{x}{2a}\right)$; $\theta_{1j}\left(\frac{x+1}{2};(-1)^j\frac{1-x}{2a}\right)$, $j=1,2.$

Ushbu masalaning yechimini

$$U(x,t)=\frac{\tau(x-at)+\tau(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\nu(z)dz \quad (4)$$

ko\`rinishda qidiramiz, bu yerda $\tau(x)$ *va* $\nu(x)$ funksiyalar hozirgi noma'lum funksiyalar bo\`lib,

$$U(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le 1$$

$$U_y(x,0)=\nu(x),\ \ 0<x<1$$

va bu funksiyalar $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, $\nu(x)\in C^2(0,1)$ xossalarga ega bo\`lishi kerak.

(4) dagi $\tau(x)$ *va* $\nu(x)$ funksiyalarni (2), (3) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan qilib aniqlaymiz. Buning uchun (4) ni (2), (3) shartlarga qo\`yib $D_j\left(j=1,2\right)$ sohalarda olingan $AB$ dagi $\tau(x)$ va $\nu(x)$ o\`rtasidagi asosiy funksional munosabatlarni topamiz:

$$P_1(x)\tau(x)=2d_1(x)-a_1(x)\tau(0)-b_1(x)\tau(1)+$$

$$+\frac{a_1(x)}{a}\int_0^x \nu(z)dz-\frac{b_1(x)}{a}\int_x^1 \nu(z)dz,\quad 0\le x\le 1 \tag{5}$$

$$P_2(x)\tau(x)=2d_2(x)-a_2(x)\tau(0)-b_2(x)\tau(1)-$$

$$-\frac{a_2(x)}{a}\int_0^x \nu(z)dz+\frac{b_2(x)}{a}\int_x^1 \nu(z)dz,\ 0\le x\le 1 \tag{6}$$

Bu yerda, $P_j(x)=a_j(x)+b_j(x),\quad j=1,2$.

Shunday qilib, qo`yilgan masalaning yechimini topish (5) va (6) tenglamalar sistemasini yechishga teng kuchli ekanligini ko`rishimiz mumkin.

Agar, ushbu sistemadan talab etilgan xossalarga ega bo`lgan $\tau(x)$ va $\nu(x)$ funksiyalarni bir qiymatli topadigan bo`lsak, u holda masalaning $D_j(j=1,2)$ sohadagi yagona yechimi (4) formula bilan aniqlanadi.

Ushbu masala yechimining yagonaligi [4], [5] da o`rganilgan bo`lib, masala yechimining mavjudligi haqidagi teorema o`rinli.

Teorema. Agar quyidagi

1) $a_j(x)\equiv 0, d_j(1)=0,\ j=1,2$
2) $b_j(x)\equiv 0, d_j(0)=0,\ j=1,2$
3) $a_j(x)\equiv 0,\ b_k(x)\equiv 0, d_j(1)=0, d_j(0)=0,\ j\ne k,\ j,k=1,2;$
4) $a_j(x)\equiv 0, a_k(x)\not\equiv 0, b_k(x)\not\equiv 0, d_j(1)=0, d_j(0)=0,\ j\ne k,\ j,k=1,2;$
5) $b_j(x)\equiv 0, a_k(x)\not\equiv 0, a_j(x)\not\equiv 0, b_k(x)\not\equiv 0, d_j(1)=0, d_j(0)=0,\ j\ne k,\ j,k=1,2;$
6) $a_j(x)\not\equiv 0, b_j(x)\not\equiv 0, d_j(1)=0, d_j(0)=0,\ j,k=1,2\ \dfrac{a_1(x)}{a_2(x)}\ne\dfrac{b_1(x)}{b_2(x)}$.

shartlardan biri o`rinli bo`lsa, u holda qo`yilgan masalaning yagona yechimi mavjud bo`ladi.

Isbot. Ushbu teoremani umumiy hol bo`lgan 6-hol uchun isbotlaymiz.

Aytaylik, $a_j(x)\not\equiv 0,\ b_j(x)\not\equiv 0, d_j(0)=0, d_j(1)=0,\ j=1,2$ bo'lsin. $d_j(0)=0$, $d_j(1)=0$ va $\dfrac{a_1(0)}{a_2(0)}\cdot\dfrac{b_2(1)}{a_2(1)}\ne\dfrac{a_2(0)}{b_2(0)}\cdot\dfrac{b_1(1)}{a_1(1)}$ bo`lganda (2), (3) shartlardan $\tau(0)=0$ va $\tau(1)=0$ ekanligi kelib chiqadi.

Agar (5) tenglikning har ikki tomonini $b_2(x)$ ga, (6) tenglikni esa, $b_1(x)$ ga ko`paytirib, qo`shib yuborsak, $\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \neq \frac{b_1(x)}{b_2(x)}$ bo`lganda

$$\left[P_1(x)b_2(x)+P_2(x)b_1(x)\right]\cdot\tau(x)=2\left(b_2(x)d_1(x)-b_1(x)d_2(x)\right)+$$

$$+\frac{a_1(x)b_2(x)-a_2(x)b_1(x)}{a}\cdot\frac{1}{a}\int_0^x \nu(z)dz,\ 0\le x\le 1\ ; \qquad (7)$$

Agar (5) tenglikning har ikki tomonini $a_2(x)$ ga, (6) tenglikni esa, $a_1(x)$ ga ko`paytirib qo`shib yuborsak, $\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \neq \frac{b_1(x)}{b_2(x)}$ bo`lganda

$$\left[P_1(x)a_2(x)+P_2(x)a_1(x)\right]\cdot\tau(x)=2\left(a_2(x)d_1(x)-a_1(x)d_2(x)\right)+$$

$$\frac{a_1(x)b_2(x)-a_2(x)b_1(x)}{a}\cdot\frac{1}{a}\int_x^1 \nu(z)dz,\ 0\le x\le 1 \qquad (8)$$

munosabatlarga ega bo‘lamiz.

(7), (8) ni mos ravishda

$$\frac{1}{a}\int_0^x \nu(z)dz=a\cdot q_1(x)\cdot\tau(x)-a\cdot k_1(x) \qquad (9)$$

$$\frac{1}{a}\int_x^1 \nu(z)dz=a\cdot q_2(x)\cdot\tau(x)-a\cdot k_2(x) \qquad (10)$$

ko`rinishda yozib olishimiz mumkin.

Bu yerda, $q_1(x)=\frac{P_1(x)b_2(x)+P_2(x)b_1(x)}{a_1(x)b_2(x)-a_2(x)b_1(x)}$,

$$k_1(x)=\frac{2\left(d_1(x)b_2(x)+d_2(x)b_1(x)\right)}{a_1(x)b_2(x)-a_2(x)b_1(x)}, \qquad q_2(x)=\frac{P_1(x)a_2(x)+P_2(x)a_1(x)}{a_1(x)b_2(x)-a_2(x)b_1(x)},$$

$$k_2(x)=\frac{2\left(d_1(x)a_2(x)+d_2(x)a_1(x)\right)}{a_1(x)b_2(x)-a_2(x)b_1(x)}$$

(9) va (10) ni har ikki tomonidan x bo`yicha differensiallab, $\tau(0)=0, k_1(0)=0$ va $\tau(1)=0, k_2(1)=0$ ekanligini inobatga olsak,

$$\frac{1}{a}\nu(x)=q_1(x)\cdot\tau'(x)+q'_1(x)\cdot\tau(x)-k'_1(x)\ , \qquad (11)$$

$$-\frac{1}{a}\nu(x)=q_2(x)\cdot\tau'(x)+q'_2(x)\cdot\tau(x)-k'_2(x) \qquad (12)$$

ko‘rinishda yoziladi.

Ushbu tengliklarni bir-biriga qo‘shib yuborsak, natijada quyidagi

$$\left[q_1(x)+q_2(x)\right]\cdot\tau'(x)+\left[q'_1(x)+q'_2(x)\right]\cdot\tau(x)=k'_1(x)+k'_2(x)$$

$$\left[\left(q_1(x)+q_2(x)\right)\cdot\tau(x)\right]'=k'_1(x)+k'_2(x)$$

munosabatga ega bo‘lamiz.

Agar, oxirgi tenglikni har ikki tomonini x bo‘yicha integrallasak,

$$\tau(x)=\frac{k_1(x)+k_2(x)+C}{q_1(x)+q_2(x)}.$$

ekanligi kelib chiqadi. Agar $\tau(0)=\tau(1)=0$ ekanligini e’tiborga olsak, $C=0$ bo`lib, oxirgi tenglikdagi $k_1(x)$, $k_2(x)$, $q_1(x)$, $q_2(x)$ larni o`rniga qo`yib, soddalshtirganimizdan keyin

$$\tau(x)=\frac{d_1(x)}{P_1(x)}+\frac{d_2(x)}{P_2(x)} \qquad (13)$$

tenglikni hosil qilamiz.

(13) ni (11) yoki (12) ga qo`ysak,

$$\nu(x)=a\left[q_1(x)\left(\frac{d_1(x)}{P_1(x)}+\frac{d_2(x)}{P_2(x)}\right)-k_1(x)\right]'$$

ga teng bo`ladi. Natijada, $a_j(x)\not\equiv 0,\ b_j(x)\not\equiv 0, d_j(0)=0, d_j(1)=0,\ j=1,2$ bo`lganda qo`yilgan masalaning yechimini

$$U(x,t)=\frac{1}{2}\left[\frac{d_1(x-at)}{P_1(x-at)}+\frac{d_2(x-at)}{P_2(x-at)}+\frac{d_1(x+at)}{P_1(x+at)}+\frac{d_2(x+at)}{P_2(x+at)}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[q_1(x-at)\left(\frac{d_1(x-at)}{P_1(x-at)}+\frac{d_2(x-at)}{P_2(x-at)}\right)-k_1(x-at)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\left[q_1(x+at)\left(\frac{d_1(x+at)}{P_1(x+at)}+\frac{d_2(x+at)}{P_2(x+at)}\right)-k_1(x+at)\right]$$

ko`rinishda aniqlanadi.

Shunday qilib, teoremadagi 6) shart bajarilganda, masala yechimining mavjudligi isbotlandi. 1)-5)- xollar ham yuqoridagi kabi isbotlanadi.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1.Кумыкова С.К. Краевая задача со смещением для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. -1980.-Т. 16. №1 – С. 93-104.

2. Уринов А.К., Абдукодиров А.Т. Нелокальная краевая задача со смещением для уравнения гиперболического типа, вырождающегося внутри области.// Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук, Нальчик.-2005.- Том 7.-№2.-С.68-73.

3. Уринов А.К., Абдукодиров А.Т. Нелокальная краевая задача со смещением для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Узбекский математический журнал. Ташкент.- 2005.- № 4.- С.102-110.

4. Qo`ldasheva Sh. Giperbolik tipdagi tenglamalar uchun bitta yarim tekislikdagi xarakteristikalarda berilgan chegaraviy masala yechimining yagonaligi haqida. Математика, механика и интеллектуальные технологий., Тошкент-2023: Материалы II Республиканской научно-практической конференции молодых ученых (Ташкент, 28-29 марта 2023 г). С.240-241.

5. Qo`ldasheva Shohsanam Ravshanjon qizi. Giperbolik tipdagi tenglamalar uchun bitta yarim tekislikdagi xarakteristikalarda berilgan chegaraviy masala yechimining yagonaligi haqida. "Pedagog" respublika ilmiy jurnali materiallari to`plami. 15-aprel,2023-yil. 6-tom 4-son. S.360-364.