

FIBBONACHI KETMA-KETLIGINING UMUMLASHGAN KO'RINISHI

Sh. Abduraximov

*Andijon qishloq xo'jaligi va agrotexnologiyalari instituti
Axborot texnologiyalari va matematika kafedrası asissenti*

Maqolada Fibbonachi ketma-ketligini umumlashgan holda ko'rish orqali Fibbonachi sonlaridagi qonuniyatlar o'zgarishligi, uning umumiy formulasini keltirib chiqarishga harakat qilingan.

Kalit so'zlar: Fibbonachi ketma-ketligi, umumiy hadi, hadlar nisbati, Fibbonachi ketma-ketligining umumlashgan ko'rinishi.

Matematikadan xabardor bo'lganlar orasida Fibbonachi sonlarini deb nomlanuvchi sonlar qatorini bilmaydigani bo'lmasa kerak. Bu haqda Leonardo Fibbonachi o'zining 1202 yilda yozilgan Abak asarida bayon etilgan. Bu asarning 4 kitobida quyovlar bilan bog'liq holda Fibbonachi sonlar ketma-ketligi haqidagi masalani keltirilgan.

Bizga ma'lumki Fibbonachi masalasi taxminan quyidagi ko'rinishda.

Bir odam hamma tomoni devor bilan o'ralgan yo'lakka bir juft quyovni joylashtirdi. Agar ikkinchi oydan boshlab har oy har bir juft quyov yana bir juft quyovni dunyoga keltirishi ma'lum bo'lsa, bir yildan so'ng necha juft quyov dunyo yuzini ko'radi?

Fibbonachi sonlari (ketma-ketligi) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,...Shu Fibbonachi sonlarini shartlariga o'zgartirish kiritib uning umumiy formulasini keltirib chiqarishga harakat qilamiz.

Masala shartiga ko'ra dastlabki 12 oyning har birida quyovlar soni quyidagi sonlarga mos ravishda bo'ladi: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987 va hokazo. Masalani matematik tilga ko'chirish dastlabki 2ta hadi 1dan va keying hadlar oldingi 2ta handing yig'indisiga $x_i = x_{i-1} + x_{i-2}$ teng sonlardan iborat sonlar qatori Fibbonachi sonlari deyiladi.

Bu sonlar ketma-ketligining ajoyib xossasi mavjud. Bu Fibbonachi sonlari ketma ketligidagi sonni o'zidan oldingi songa nisbatlari 1,618 soni atrofida bo'ladi, ya'ni

$$1, 1, 2$$

$$3, 3 / 2 = 1.5$$

$$5, 5 / 3 = 1.6667$$

$$8, 8 / 5 = 1.6$$

$$13, 13 / 8 = 1.625$$

$$21, 21 / 13 = 1.61538461538462$$

$34, 34 / 21 = 1.61904761904762$
 $55, 55 / 34 = 1.61764705882353$
 $89, 89 / 55 = 1.61818181818182$
 $144, 144 / 89 = 1.61797752808989$
 $233, 233 / 144 = 1.61805555555556$
 $377, 377 / 233 = 1.61802575107296$
 $610, 610 / 377 = 1.61803713527851$
 $987, 987 / 610 = 1.61803278688525$
 $1597, 1597 / 987 = 1.61803444782168$
 Nisbatlar **1.61803** sonlarni olish mumkin.

Shu yerdan masalani men qiziqtirgan tomoniga o‘tsak. Ya’ni dastlabki quyonlar soni 1dan farqli bo‘lsa qanday qonuniyatlar bo‘lishi mumkin.

Bizga masaladagi dastlabki quyon 1juft emas 2 ta juftdan iborat bo‘lganda shu qonuniyat o‘zgaradimi? Shuni matematik ko‘zi bilan qaraylik.

2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, 110, 178, 288, 466,,

Biz masaladagi bu shartni umumlashtirib dastlabki quyon 1juft emas n ta juftdan iborat bo‘lganda shu qonuniyat o‘zgaradimi? Shuni matematik ko‘zi bilan qaraylik. $n, n, 2n, 3n, 5n, 8n, 13n, 21n, 34n, 55n, \dots$ ko‘rinishga keladi. Bu holatda qonuniyat o‘zgarmasdan qoladi.

Endi masala shartini boshqacharoq ko‘rinishda o‘zgartiramiz.

Bizga masaladagi dastlabki quyon 2ta emas 3ta bo‘lsa yuqoridagi qonuniyat saqlanib qoladimi?

Bu holatda Fibbonachi sonlar ketma ketligi ketma-ketlik hadi oldingi 3ta hadi yig‘indisidan iborat bo‘lsa, ketma-ketlik hadlari 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653, 1201, ... ko‘rinishda davom etadi. Yuqoridagidek ketma-ketlikning ixtiyoriy (3-hadidan keyingi) hadlarini oldingi hadiga nisbati qanday bo‘ladi?

$1, 1, 1, 3$
 $5, 5 / 3 = 1.66666666666667$
 $9, 9 / 5 = 1.8$
 $17, 17 / 9 = 1.88888888888889$
 $31, 31 / 17 = 1.82352941176471$
 $57, 57 / 31 = 1.83870967741935$
 $105, 105 / 57 = 1.84210526315789$
 $193, 193 / 105 = 1.83809523809524$
 $355, 355 / 193 = 1.83937823834197$
 $653, 653 / 355 = 1.83943661971831$
 $1201, 1201 / 653 = 1.83920367534456$

2209, 2209 / 1201 = 1.83930058284763
4063, 4063 / 2209 = 1.83929379809869
7473, 7473 / 4063 = 1.83928131922225
13745, 13745 / 7473 = 1.83928810384049
25281, 25281 / 13745 = 1.83928701345944
46499, 46499 / 25281 = 1.8392864206321
85525, 85525 / 46499 = 1.83928686638422
157305, 157305 / 85525 = 1.83928675825782
289329, 289329 / 157305 = 1.83928673595881
532159, 532159 / 289329 = 1.83928676351144

Bu holda nisbat **1.83928** soniga teng bo‘ladi.

Fibbonachi sonlar ketma-ketligida ketma-ket kelgan 4ta had yig‘indisi keyingi hadga teng deb hisoblasak, ketma ketlik 1, 1, 1, 1, 4, 7, 13, 25, 49, 94, 181, 349, 673, 1297, 2500, 4810, ... Bu ketma-ketlikda sonlar nisbati **1.92756** soniga teng bo‘ladi.

1, 1, 1, 1, 4
7, 7 / 4 = 1.75
13, 13 / 7 = 1.85714285714286
25, 25 / 13 = 1.92307692307692
49, 49 / 25 = 1.96
94, 94 / 49 = 1.91836734693878
181, 181 / 94 = 1.92553191489362
349, 349 / 181 = 1.92817679558011
673, 673 / 349 = 1.92836676217765
1297, 1297 / 673 = 1.92719167904903
2500, 2500 / 1297 = 1.92752505782575
4819, 4819 / 2500 = 1.9276
9289, 9289 / 4819 = 1.92757833575431
17905, 17905 / 9289 = 1.92754871353213
34513, 34513 / 17905 = 1.92756213348227
66526, 66526 / 34513 = 1.92756352678701
128233, 128233 / 66526 = 1.92756215614948
247177, 247177 / 128233 = 1.92756154811944
476449, 476449 / 247177 = 1.92756203044782

Fibbonachi sonlar ketma-ketligida ketma-ket kelgan 10ta had yig‘indisi keyingi hadga teng deb hisoblasak, ketma ketlik 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 10, 19, 37, 73, 145, 289, 577, 1153, 2305, 4609, 2305, 4609, ... Bu ketma-ketlikda sonlar nisbati **1.9999** soniga teng bo‘ladi.

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 10
19,, 19 / 10 = 1.9

37, 37 / 19 = 1.94736842105263
73, 73 / 37 = 1.97297297297297
145, 145 / 73 = 1.98630136986301
289, 289 / 145 = 1.99310344827586
577, 577 / 289 = 1.99653979238754
1153, 1153 / 577 = 1.99826689774697
2305, 2305 / 1153 = 1.99913269731136
4609, 4609 / 2305 = 1.99956616052061
9217, 9217 / 4609 = 1.99978303319592
18424, 18424 / 9217 = 1.99891504828035
36829, 36829 / 18424 = 1.99896873643074
73621, 73621 / 36829 = 1.99899535691982
147169, 147169 / 73621 = 1.99900843509325

Bu farazni davom ettirib har bir had o‘zidan oldingi 100ta deb faraz qilinganda ketma-ketlikdagi sonlar nisbati 1.999999 ga teng bo‘ladi. Yig‘indidagi sonlar ortgan sari bu nisbat 2ga yaqinlashadi lekin 2ga teng bo‘la olmaydi.

Yuqoridagi sonlarni hisoblab chiqishda, nisbatlarni tekshirishda paskal tilidagi quyidagi dasturdan foydalanaib olish mumkin.

```
var
  K:Array [1..100] Of Integer;
  L,S, G, I: Integer;
Begin
  Cls;
  Write('Dastlabki hadlar sonini kriting');Readln(L); // dastlabki 1ga teng hadlar
soni
  For I:=1 To L Do
    Begin
      K[I]:=1; S:=S+K[I]; Write(K[I],', ');
    End;
  Writeln(S);
  For G:=1 To 20 Do Begin
    For I:=1 To L-1 Do
      Begin
        K[I]:=K[I+1];
      End;
    K[L]:=S; Write(S, ', '); S:=0;
    For I:=1 To L Do
      Begin S:=S+K[I]; End;
```

Writeln(S,' / ',K[L],' = ', S/K[L]);
 End;
 End.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz $F_k(n)$ - dastlabki bitlar soni k ta bo'lgan ketma-ketlikning n hadi.

F_2 uchun ketma-ketlik uchun sonlar 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987 va hokazo.

F_3 uchun ketma-ketlik uchun sonlar 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, 57, 105, 193, 355, 653,...

F_k uchun ketma-ketlik uchun sonlar $1, \underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ ta}}, k, 2k-1, 4k-3$, ko'rinishda bo'ladi.

F_k ketma ketlik hadlarining umumiy ko'rinishi (dastlabki 1 lardan keying) $n+1$ hadigacha umumiy formula bilan aniqlash mumkin, uning ko'rinishi $2^{n-1}(k-1)+1$ formula bilan aniqlanadi.

Misol uchun dastlabki had(birlar)lar soni $k=5$ holda ko'ramiz. Bu yerda dastlab 5 had 1lardan iborat va keying hadlarni yozamiz: 1, 1, 1, 1, 1, 5, 9, 17, 33, 65, 129, 253, 497, 977, 1921, 3777, 7425, 14597, 28697, 56417, 110913, 218049, 428673, 842749, 1656801

$$F_5(1) = 5 \quad F_5(1) = 2^{1-1}(5-1)+1 = 4+1 = 5$$

$$F_5(2) = 9 \quad F_5(2) = 2^{2-1}(5-1)+1 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$$

$$F_5(3) = 17 \quad F_5(3) = 2^{3-1}(5-1)+1 = 2^2 \cdot 4 + 1 = 17$$

Va hokazo $k+1$ hadgacha, ya'ni 6 hadgacha o'rinli bo'ladi.

$$F_5(6) = 129 \quad F_5(6) = 2^{6-1}(5-1)+1 = 2^5 \cdot 4 + 1 = 129$$

$k+2$ haddan boshlab bu formula bilan hadlarini aniqlash mumkin emas.

Adabiyotlar:

1. S.I. Afonina. Matematika va go'zallik. Toshkent 1973. O'qituvchi.
2. А. Стахов, И. Слученкова, А. Щербаков: Код да Винчи и ряды Фибоначчи. Питер 2006.