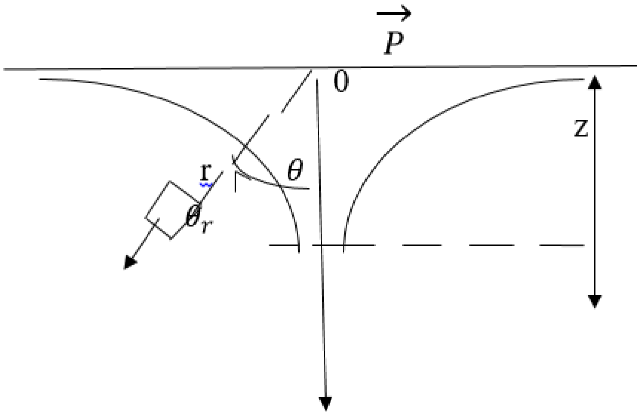
КОНТАКТ МАСАЛАЛАРИНИ ЕЧИШДА БИР НУҚТАГА ҚЎЙИЛГАН КУЧ ТАЪСИРИДАГИ ЯРИМ ЭЛАСТИК ФАЗОНИНГ КУЧЛАНГАНЛИК ҲОЛАТИНИ АНИҚЛАШ

Алмардонов Ойбек Махматқулович
ҚарМИИ катта ўқитувчиси
qmii-oybek.almardonov@mail.ru

Аннотация: Ушбу мақолада бир нуқтага қўйилган куч таъсиридаги ярим эластик фазонинг кучланганлик ҳолатини аниқлаш келтириб ўтилган бўлиб, унда кучланиш тензорининг компоненталарини ва деформация тензорининг компоненталарини аниқлаш усуллари баён қилинган.

Калит сўзлар: қутб координаталар системаси, деформация, кучланиш, кўчиш компоненталари, чегаравий шартлар, урунма кучланиш.

Бир нуқтага қўйилган куч таъсиридаги ярим эластик фазонинг кучланганлик ҳолатини аниқлаш контакт масалаларининг ажралмас бир қисмидир. Ушбу масалалар юзасидан кўпгина олимлар кўплаб олимлар изланишлар олиб боришган. Жумладан Бу масала Фламан қутб координаталар системасида кучланиш функциясини $\varphi(r,\theta) = Ar\theta\sin\theta$ кўринишида ифодалаб кучланиш тензорининг компоненталарини, деформация тензорининг компоненталарини аниқлаган.



(1-расм)

Бунда A- ўзгармас бўлиб кучланишлар қуйидаги кўринишда аниқланган.

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 2A\cos\theta/r,$$
$$\sigma_\theta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = 0, \qquad (1)$$
$$\sigma_{r\theta} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta^2}\right) = 0.$$

A константани аниқлаш учун, ихтиёрий *r* радиусли айлана бўйлаб таъсир қилаётган радиал кучланишларни вертикал *0z* ўққа проекцияларининг йиғиндисидан фойдаланамиз:

$$P = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sigma_r \cos\theta d\theta r = -2A\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta = -A\pi. \qquad (2)$$

Бундан

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi}\frac{\cos\theta}{r}. \qquad (3)$$

Олинган натижага кўра, координата системаси *0* нуқтадан ўтувчи диаметри *d* бўлган айлана бўйлаб σ_r радиал кучланиш ўзгармас қолади (1-расм). Декарт координата системасида кучланиш тензорининг компоненталари учун

$$\sigma_x = \sigma_r \sin^2\theta = -\frac{2P}{\pi}\frac{x^2 z}{(x^2+z^2)^2},$$
$$\sigma_z = \sigma_r \cos^2\theta = -\frac{2P}{\pi}\frac{z^3}{(x^2+z^2)^2}, \qquad (4)$$
$$\tau_{zx} = \sigma_r \sin\theta\cos\theta = -\frac{2P}{\pi}\frac{xz^2}{(x^2+z^2)^2},$$

муносабатларга эга бўламиз.

Энди деформация тензорининг компоненталарини ҳисоблашга ўтамиз.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta) = \frac{1-\nu^2}{E}\frac{2P}{\pi}\frac{\cos\theta}{r},$$
$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} = \frac{\nu(1+\nu)}{E}\frac{2P}{\pi}\frac{\cos\theta}{r}, \qquad (5)$$
$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}.$$

Олинган муносабатларни интеграллаб:

$$u_r = \frac{1-\nu^2}{\pi E}2P\cos\theta\ln r - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{\pi E}P\theta\sin\theta + c_1\sin\theta + c_2\cos\theta,$$
$$u_\theta = \frac{1-\nu^2}{\pi E}2P\sin\theta\ln r + \frac{\nu(1+\nu)}{\pi E}2P\theta\sin\theta - \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{\pi E}2P\theta\cos\theta + \qquad (6)$$
$$+\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{\pi E}P\sin\theta + c_1\cos\theta - c_2\sin\theta + c_3 r.$$

Oz ўқидаги нуқталар фақатгина бу ўқ бўйлаб кўчгани учун, $U_\theta(0)=0$, бундан $c_1=c_3=0$. $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ бурчакларга мос келувчи кўчишлар учун

$$\bar{u}_r(\frac{\pi}{2})=\bar{u}_r(-\frac{\pi}{2})=-\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{\pi E}P$$
$$\bar{u}_\theta(\frac{\pi}{2})=\bar{u}_\theta(-\frac{\pi}{2})=-\frac{1-\nu^2}{E}2P\ln r+c \qquad (7)$$

натижа ўринли. Ярим эластик муҳитни уринма куч таьсиридаги деформацияланиш ҳолатига тегишли натижаларни, нормал кучга нисбатан муҳитни 90^0 бурчакка буриш натижасида, яьни қутб бурчагини вертикал кучдан ҳисоблаш йўли билан олиш мумкин.

Яьни :

$$\sigma_r=-\frac{2Q}{\pi}\frac{\cos\theta}{r}, \quad \sigma_\theta=\tau_{r\theta}=0. \qquad (8)$$

Координата $0xz$ текислигида эса

$$\sigma_x=-\frac{2Q}{\pi}\frac{x^3}{(x^2+z^2)^2},$$
$$\sigma_z=-\frac{2Q}{\pi}\frac{xz^2}{(x^2+z^2)^2}, \qquad (9)$$
$$\tau_{xz}=-\frac{2Q}{\pi}\frac{x^2z}{(x^2+z^2)^2}.$$

Текис тарқалган вертикал кучлартаъсирида ярим текисликни кучланганлик ҳолати.

Қуйида ярим текисликдан иборат муҳитни текис тарқалган вертикал кучлар таьсиридаги кучланганлик ҳолатини кўриб чиқамиз.

Бунга кўра :

$$p(x)=p; \quad q(x)=0, \quad -a<x<a \qquad (10)$$

Юқорида келтирилган формулаларга ўзгармас p ни қўйиб, кучланиш тензори компоненталари учун

$$\sigma_x=-\frac{P}{2\pi}\left[2(\theta_1-\theta_2)+(\sin 2\theta_1-\sin 2\theta_2)\right],$$
$$\sigma_z=-\frac{P}{2\pi}\left[2(\theta_1-\theta_2)-(\sin 2\theta_1-\sin 2\theta_2)\right], \qquad (11)$$
$$\tau_{xz}=\frac{P}{2\pi}(\cos 2\theta_1-\cos 2\theta_2).$$

Бунда: $tg\theta_{1,2}=\frac{z}{x\pm a}$. Агар $\alpha=\theta_1-\theta_2$ белгилаш киритсак, у ҳолда бош кучланишлар қуйидаги кўринишла аниқланади:

$$\sigma_{1,2} = (p/\pi)(\alpha \pm \sin\alpha), \tag{12}$$

ва текисликка нисбатан $(\theta_1 + \theta_2)/2$, бурчак остида таьсир қилади. Максимал урунма кучланиш эса,

$$\tau_1 = (p/\pi)\sin\alpha, \tag{13}$$

бўлади. Кучланиш зонаси $-a \le x \le a$ оралиғида жойлашган нуқталар учун деформациялар

$$\frac{\partial \overline{u_x}}{\partial x} = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}p,$$
$$\frac{\partial \overline{u_z}}{\partial x} = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}\int_{-a}^{a}\frac{ds}{x-s}, \tag{14}$$
$$\overline{u_x} = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}px,$$

кўринишда аниқланади. Бу интегралларга кўра, интеграл остидаги функция $s = x$ да махсусликка эга бўлади ва сингуляр интеграл деб аталади. Унинг интеграллаш жараёнида иккита қисмга $s = -a$ дан $x - \varepsilon$ гача ва $s = x + \varepsilon$ дан a гача ажратамиз. Бу ерда ε жуда кичик миқдор. Шундай қилиб, Фламан томонидан олинган натижаларга кўра, ярим текисликни текис тарқалган вертикал кучлар остидаги деформацияланган ҳолига мос келувчи кучланиш тензорининг компоненталарини аниқласа бўлар экан.

Фойдаланилган адабиётлар:

1. Джонсон К. "Механика контактного взаимодействия". Москва. МИР. 1989.
2. Hardy C., Baronet C.N., Tordion G.V. Elastoplastic identation of a half-space by a rigid sphere.-J.Numerical Methods in Engng., 1971, 3, p.451.
3. Аргатов И.И., Назаров С.А. Метод сращиваемых разложений для задач с малыми зонами контакта // Механика контактных взаимодействия. М. :Физматлит, 2001. С. 73-82
4. Алмардонов О.М."Эгри чизиқли штамп масаласи"-Математика, механика ва информатика фанларининг ривожида истеъдодли ёшларнинг ўрни илмий амалий тезислари тўплами. Тошкент-2014. 6-бет